ANEXO I

MATEMÁTICA

NÚMEROS REALES

Comprenden a los números naturales, enteros, racionales e irracionales. El conjunto de los números reales se simboliza **R**.

Naturales: son los números que sirven para contar 1, 2, 3... etc. El conjunto de los naturales se simboliza **N**

Enteros: son los naturales, el cero y los negativos de los naturales. El conjunto de los enteros se simboliza **Z**

Racionales: son todos los números que se expresan como *p/q*, con *p* entero y *q* natural. El conjunto de los racionales se simboliza **Q**. La expresión decimal de un número racional es siempre periódica, es decir, posee una serie de dígitos que se repiten siempre (1,23969696969696...)

Irracionales: son números cuya expresión decimal es infinita y no-periódica (π, $\sqrt{2}$, etc.)

El conjunto de los números irracionales se simboliza **I**.

PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES

Las operaciones entre números (racionales o reales) satisfacen las siguientes propiedades básicas (*a, b* y *c* son números racionales o reales cualesquiera):

$\boldsymbol{A_1}$. $a + (b + c) = (a + b) + c$	(Asociativa de la suma)
$\boldsymbol{A_2}$. $a + b = b + a$	(Conmutativa de la suma)
$\boldsymbol{A_3}$. $a + 0 = a$	(0 es el neutro para la suma)
$\boldsymbol{A_4}$. $a + (-a) = 0$	(-a es el opuesto de a para la suma)
$\boldsymbol{M_1}$. $a.(b.c) = (a.b).c$	(Asociativa del producto)
$\boldsymbol{M_2}$. $a.b = b.a$	(Conmutativa del producto)
$\boldsymbol{M_3}$. $a.1 = a$	(1 es el neutro para el producto)
$\boldsymbol{M_4}$. Si $a \neq 0$ entonces $a.(1/a) = 1$	(1/a es el inverso de a)
D. $a.(b + c) = a.b + a.c$	(Distributiva)

Regla de los signos

- Para sumar dos números de igual signo, se suman y se pone el signo que tienen en común.

$$2+3 = 5; \quad -2-3 = -5$$

- Para sumar dos números de signos diferentes, se resta al más grande el más chico y al resultado se le pone el signo del más grande.

$$2+(-3)=2-3=-1 \qquad\qquad -2+3=1$$

- Para multiplicar (o dividir) dos números de igual signo, se multiplican (o dividen) sus valores absolutos y se antepone el signo + al resultado (o no se pone signo).

$$2.3=6 \qquad (-2).(-3)=6 \qquad \frac{-6}{-3}=2$$

- Para multiplicar (o dividir) dos números de distinto signo, se multiplican (o dividen) sus valores absolutos y se antepone el signo - al resultado.

$$(-2).3=-6 \qquad 2.(-3)=-6 \qquad \frac{-6}{3}=-2$$

POTENCIAS Y EXPONENTES

Cuando un número *a* se multiplica *n* veces, el producto *a.a....a* (*n* veces) se representa por el símbolo $\boldsymbol{a^n}$ que se lee "*a* a la *n*". El número *a* se llama *base* y la *n*, *exponente*.

Ejemplo

$$2.2.2.2=2^4 \qquad 2.x.x.x=2x^3 \qquad (-3).(-3)=(-3)^2$$

Propiedades	**Ejemplos**
1) $a^p.\ a^q=a^{p+q}$	1) $2^3.\ 2^4=2^{3+4}=2^7$
2) $\dfrac{a^p}{a^q}=a^{p-q}$	2) $\dfrac{3^5}{3^2}=3^{5-2}=3^3 \qquad \dfrac{3^4}{3^6}=\dfrac{1}{3^{6-4}}=\dfrac{1}{3^2}$
3) $(ab)^p=a^pb^p$	3) $(4^2)^3=4^6$
4) $(a^p)^q=a^{pq} \qquad \left(\dfrac{a}{b}\right)^p=\dfrac{a^p}{b^p}$ si $b\neq 0$	4) $(4.5)^2=4^2.5^2 \qquad \left(\dfrac{5}{2}\right)^3=\dfrac{5^3}{2^3}$
5) $a^0=1$ para todo a	5) $3^0=1, \quad (-2)^0=1$

Potencia de exponente negativo

Si *n* es un entero positivo, por definición: $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$ (con $a\neq 0$)

Ejemplo

$$2^{-4}=1/2^4=1/16 \qquad 1/3^{-3}=3^3=27 \qquad -4x^{-2}=-4/x^2$$

RADICACIÓN

Raíz cuadrada

Si *a* es un número real no-negativo, la raíz cuadrada de *a*, simbolizada $\sqrt{a}$, es el único número real no-negativo *b* cuyo cuadrado es *a*: $\sqrt{a}$ **= b** $\Rightarrow$ $\mathbf{b^2 = a}$.

Si *a* es cualquier número real entonces $\sqrt{a^2}$ = |a| = $\underline{+}$ a

Raíz enésima

Si *n* es un entero positivo y *a* y *b* son tales que $\mathbf{b^n = a}$, por definición *b* es la *raíz enésima* de *a*.

$$\sqrt[n]{a} = b$$

Ejemplo

$\sqrt[4]{16} = +2$ (+2 es la raíz principal, ya que –2 también es raíz y tiene otras 2 imaginarias)

$\sqrt[3]{-27} = -3$ (-3 es la raíz principal, las otras 2 son imaginarias o complejas)

$\sqrt[4]{-16}$ (no se puede representar por un número real, las 4 raíces son imaginarias)

Potencia de exponente fraccionario positivo

Si *m* y *n* son enteros positivos, por definición:

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} \text{ (suponiendo } a \geq 0 \text{ si } n \text{ es par)}$$

Ejemplo

$$4^{3/2} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$$

$$(27)^{2/3} = \sqrt[3]{27^2} = 9$$

Potencia de exponente fraccionario negativo

Si *m* y *n* son enteros positivos, por definición:

$$a^{-m/n} = \frac{1}{a^{m/n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

Ejemplo

$$8^{-2/3} = \frac{1}{8^{2/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{4}$$

Problemas

1. Calcular las siguientes expresiones, siendo $x = 2$, $y = -3$, $z = 5$, $a = ½$, $b = -2/3$:

a.	$2x + y =$	R: 1
b.	$3x - 2y - 4z =$	R: -8
c.	$4x^2y =$	R: -48
d.	$\dfrac{x^3+4y}{2a-3b} =$	R: -4/3

2. Resolver (si bien las respuestas están dadas, encontrar el camino hacia ellas):

a. $2^{-3} = 1/8$

b. $(-2b)^{-2} = 1/4b^2$

c. $(3/4)^{-2} = 16/9$

d. $8^{2/3} = 4$

e. $(-8)^{2/3} = 4$

f. $8^{-2/3} = 1/4$

g. $(-8)^{-2/3} = 1/4$

h. $(1/16)^{-1/2} = 4$

i. $3^4 . 3^5 = 3^9$

j. $a^{n+1} . a^{n-2} = a^{2n-1}$

k. $x^{1/2} . x^{-1/3} = x^{1/6}$

l. $5\ 10^{-3} = 1/200$

m. $10^7\ 10^{-3} = 10^4$

n. $\left(\dfrac{x}{x+y}\right)^{-1}\left(\dfrac{x}{x+y}\right)^{1/2} = \left(\dfrac{x+y}{x}\right)^{1/2}$

o. $(10^{-3})^2 = 10^{-6}$

p. $\left(\sqrt[3]{a+b}\right)^6 = (a+b)^2$

q. $\sqrt[6]{\sqrt[3]{a^2}} = a^{1/9}$

r. $\dfrac{9.10^{-2}}{3.10^4} = 3.10^{-6}$

s. $(3.10^2)^4 = 81.10^8$

t. $(2/3)^4 = 32/81$

u. $(2/5)^{-3} = 125/8$

v. $\left(\dfrac{5^3}{2^6}\right)^{-1/3} = 4/5$

OPERACIONES FUNDAMENTALES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Expresión algebraica es una combinación de números y letras que representan números cualesquiera.

Ej. $3x^2 - 5xy + 3y^4$, $\dfrac{5xy+3z}{2a^3-c^2}$

Término es una expresión que sólo contiene productos y cocientes de números y letras.

Ej. $6x^2y^3$, $5x/3y^4$

Monomio es una expresión algebraica de un solo término.

Ej. $7x^3y^4$, $4x^2/y$

Binomio es una expresión algebraica de dos términos.

Ej. $2x + 4y, 3x^4 - 4xyz^3$

Trinomio es una expresión algebraica de tres términos.

Ej. $3x^2 + 5x + 2$

Polinomio es una expresión algebraica de más de un término.

Coeficiente numérico: si un término es el producto de un número por una o varias letras, dicho número es el coeficiente numérico o solo coeficiente.

Ej. $-5x^3y$ (coef. = -5), x^2y^6 (coef. = 1)

Términos semejantes son aquellos que solo se diferencian en su coeficiente numérico.

Ej. $7xy$ y $-2xy$ son semejantes, en cambio $2a^2b^3$ y $3a^2b^7$ no lo son. Los términos semejantes se pueden agrupar en uno solo: $7x^2y - 4x^2y + 2x^2y = 5x^2y$

Polinomio es un monomio o multinomio, en el que cada término es entero y racional con respecto a las letras.

Ej. $3x^2 - 2$, $4xy + z - 6x^2$ son polinomios,
en cambio $3x^2 - 4/x$ ó $4\sqrt{x} + 3$ no son polinomios.

Grado de un monomio es la suma de todos los exponentes de la parte literal del término.

Ej. $4x^3y^2z$ (grado 3+2+1= 6)

Grado de un polinomio es el correspondiente al término de mayor grado cuyo coeficiente sea $\neq 0$.

Ej. $7x^3y^2 - 4xz^5 + 2x^3y$, cada término tiene grado 5, 6 y 4 respectivamente, por consiguiente, el grado del polinomio es 6.

Cuadrado de un binomio

Sea **(a + b)** un binomio cualquiera, $\mathbf{(a + b)^2} = \mathbf{(a + b) . (a + b)} = \mathbf{a^2 + 2ab + b^2}$

Sea **(a - b)** un binomio cualquiera, $\mathbf{(a - b)^2} = \mathbf{(a - b) . (a - b)} = \mathbf{a^2 - 2ab + b^2}$

Al elevar al cuadrado un binomio, se obtiene un trinomio llamado *trinomio cuadrado perfecto*.

Por lo tanto todo trinomio de la forma $\mathbf{a^2 \pm 2ab + b^2}$ puede escribirse como $\mathbf{(a \pm b)^2}$

Ej. $(x + 2y^2) = x^2 + 2x.2y^2 + 4y^4$
$(3x + 2)^2 = 9x^2 + 2.3.2x + 4 = 9x^2 + 12x + 4$
$(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$

Problemas:

1. Hallar el grado de los siguientes polinomios:

   a) $2x^3y + 4xy^4z$

   b) $x^2 + 3x^3 - 4$

   c) $xz^3 + 3x^2z^2 - 4x^3z + x^4$

2. Efectuar los productos indicados en los casos siguientes:

   a) $(-2ab^3)(4a^2b^5)=$

   b) $(3ab^2)(2ab + b^2)=$

   c) $(x^2 - 3xy + y^2)(4xy^2)=$

3. Resolver:

a) $(x + 6)^2 =$

b) $(z - 4)^2 =$

c) $(3x + 5y)^2 =$

d) $(3 - 2x^2)^2 =$

4. Expresar como cuadrado de un binomio si es posible:

a) $x^2 + 8x + 16 =$

b) $t^2 - 4t + 4 =$

c) $16a^4 - 72a^2b^2 + 81b^4 =$

d) $x^2 - 16xy + 64y^2 =$

e) $16m^2 - 40mn + 25n^2 =$

f) $x^2 + 10x + 16 =$

g) $t^2 - 6t + 4 =$

h) $4 + 4y + 4y^2 =$

5. Reducir las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{x^2} =$

b) $\sqrt{a^2 + 2a + 1} =$

c) $\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1} =$

NOTACIÓN EXPONENCIAL

Este tipo de notación se utiliza comúnmente en temas científicos ya que permite manejar números muy grandes (cantidad de átomos, moléculas, etc.) o muy pequeños (peso de un átomo o molécula, etc.).

Todo número puede expresarse de la siguiente manera:

$234 = 234{,}0 = 2{,}34 .10^2$	$0{,}023 = 2{,}3\ 10^{-2}$
$1200 = 1{,}2\ 10^3$	$0{,}0000124 = 1{,}24\ 10^{-5}$
$1\,000\,000 = 1\ 10^6$	$0{,}356 = 3{,}56\ 10^{-1}$

En la notación exponencial todo número queda reducido a un solo entero (mayor que cero) con los decimales que sean necesarios, acompañado con una potencia de 10.

Observemos que:

- Cuando esa potencia es positiva, el número es grande (valor absoluto > 1).
- Cuando esa potencia es negativa, el número es pequeño (valor absoluto < 1).

La regla práctica para convertir estos números es:

- Si la coma se corre a la izquierda, la potencia es positiva.
- Si se corre a la derecha, la potencia es negativa.
- El valor absoluto de la potencia es igual al número de posiciones que se ha corrido la coma.

Problemas:

1. Convertir los siguientes números en su forma exponencial:

1 584 000 =	250,34 =
230 500 000 =	23,58 =
10 300 000 =	654 000,3 =
5 389 210 000 =	0,000002 =
1000 =	0,1034 =
30 000 =	0,00000034 =
231 =	0,365000 =

2. Expresar los siguientes números en forma decimal:

$1{,}023\ 10^5 =$	$8{,}007\ 10^3 =$
$2{,}34\ 10^4 =$	$1\ 10^{-1} =$
$4{,}05\ 10^3 =$	$2{,}03\ 10^{-4} =$
$7{,}0003\ 10^2 =$	$4{,}5\ 10^{-3} =$
$1\ 10^6 =$	$6{,}13\ 10^{-2} =$
$2\ 10^1 =$	$3\ 10^{-6} =$

3. Resolver:

a) $\dfrac{(60.000)^3(0{,}00002)^4}{100^2(72.000.000)(0{,}0002)^5} =$ b) $\sqrt[3]{\dfrac{(0{,}004)^4(0{,}0036)}{(120.000)^2}} =$

FUNCIONES EXPONENCIALES

Se llama exponencial a toda función de la forma $\mathbf{f(x) = ka^x}$, donde k y a son constantes, con las condiciones adicionales de que $a > 0$ y $a \neq 1$ y $k \neq 0$. El número *a* se llama *base* de la exponencial, y el número *k* se llama *coeficiente* de la misma.

Estas funciones aparecen en las aplicaciones de manera natural al considerar fenómenos de crecimiento o decrecimiento.

Propiedades de las exponenciales

Algunas de las propiedades importantes de las funciones exponenciales son las siguientes:

- Las funciones exponenciales son crecientes en R si a > 1 y decrecientes en R si 0 < a < 1.
- Las funciones exponenciales nunca valen cero.
- Los valores de una función exponencial tienen siempre el mismo signo que su coeficiente k.

Para coeficientes k negativos las propiedad 1 se transforma en:

- Las funciones exponenciales son decrecientes en R si a > 1 y crecientes en R si 0 < a < 1.

FUNCIONES LOGARÍTMICAS

La función exponencial tiene función inversa.

Si **a** es un número positivo ($a \neq 1$) se llama "función logarítmica de **base a**", a la función inversa de la función **f(x) = a^{x}**. Para la función logarítmica de base a suele usarse la notación: **$\log_a$**. Es decir que, por definición:

$$\log_a y = x \qquad \text{si y sólo si} \qquad a^x = y.$$

Ej.	$\text{Log}_2 8 = 3$	porque	$8 = 2^3$
	$\text{Log}_5 1/5 = -1$	porque	$1/5 = 5^{-1}$
	$\text{Log}_B 1 = 0$	porque	$1=B^0$ (cualquiera sea B)
	$\text{Log}_B B = 1$	porque	$B = B^1$ (cualquiera sea B)

Aunque por definición cualquier número positivo $a \neq 1$ puede ser tomado como base de una función logarítmica se suelen usar únicamente valores mayores que 1.

Hay dos valores particulares que son usados preferentemente: el número **10** y el número irracional **e** = 2,7182818... Los logaritmos de **base 10** suelen llamarse *logaritmos decimales*, y los logaritmos de **base e** suelen llamarse *logaritmos naturales o neperianos*. Para los primeros suele usarse la notación **log** (omitiendo mencionar la base) y para los segundos la notación **ln**.

Por ser exponencial y logarítmica inversas entre sí se verifican las siguientes igualdades:

$$\ln(e^x) = x \qquad e^{(\ln y)} = y$$

$$\log(10^x) = x \qquad 10^{(\log y)} = y$$

Propiedades de las logarítmicas

Algunas de las propiedades importantes de las funciones logarítmicas son las siguientes (valen para logaritmos de cualquier base, en particular para log de base 10 y ln de base e):

- $\log 1 = 0$.
- Si p, q son números reales positivos entonces $\log (p \cdot q) = \log p + \log q$.
- Si p, q son números reales positivos entonces $\log (p / q) = \log p - \log q$.
- Si p es un número real positivo y r es cualquier número real entonces: $\log (p^r) = r. \log p$

Ej.	$\log (10\ 100) = \log 10 + \log 100$	$\log 1000 = 1 + 2 = 3$	$10^3 = 1000$
	$\log_2(1000/10) = \log 1000 – \log 10$	$\log 100 = 3 - 1 = 2$	$10^2 = 100$
	$\log 10^2 = 2 .\log 10$	$\log 100 = 2 .1 = 2$	$10^2 = 100$
	$\log \sqrt[3]{10} = \log 10^{1/3} = 1/3 . \log 10 = 1/3$		$10^{1/3} = \sqrt[3]{10}$

Gráficos semilogarítmicos

Dada una función exponencial **f(x) = k.a^{x}**, tomando logaritmos decimales en ambos miembros se transforma en ***log f(x) = log k + x.log a = Ax + B***.

Se obtiene así *log f(x) = y* como función lineal de *x*.

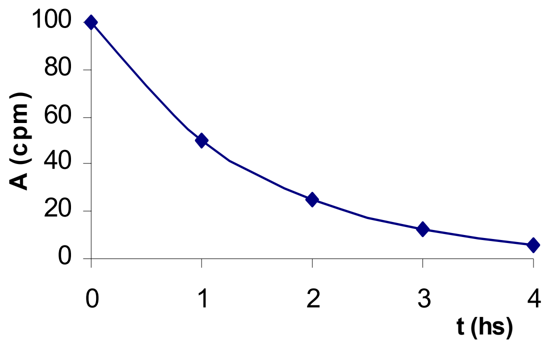
Esto sirve para trabajar gráficamente con funciones exponenciales:

- Utilizando papel semilogarítmico la gráfica de toda exponencial se transforma en una recta, a partir de la cual es posible realizar con facilidad cálculo de valores de la función.

Sea $A = 100.e^{-\lambda.t}$

$\lambda = 0{,}693\ h^{-1}$ que equivale a un T½ de 1 h

$\Rightarrow$ log A = log100 - λ.t. log e $\quad\Rightarrow\quad$ log A = log100 – 0,43 λ.t.



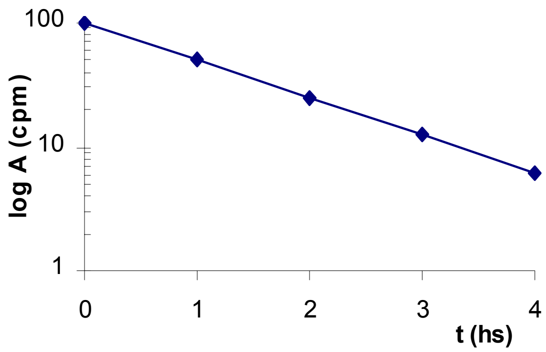


Figura 1. Gráficos de actividad vs. tiempo en escala normal y semilogarítmica

Problemas:

1. Expresar las siguientes formas logarítmicas en forma exponencial:

   a) log 100 = 2
   b) log 1000 = 3
   c) ln e^3 = 3
   d) log 1 = 0
   e) log 1/100 = -2
   f) ln 1/e^2 = -2

2. Expresar las siguientes formas exponenciales en forma logarítmica:

   a) $p^q = r$
   b) $10^3 = 1000$
   c) $10^2 = 100$
   d) $10^{-2} = 1/100$

3. Hallar el valor de los siguientes logaritmos:

   a) log 64 =
   b) ln 81 =
   c) log 10^2 =
   d) ln e =
   e) ln e^2 =
   f) ln e^{-3} =

4. Resolver las ecuaciones siguientes:

   a) log x =2
   b) log x =3
   c) log y = -2
   d) log (2x + 2) = 1

5. Expresar las siguientes relaciones en un solo logaritmo:

a) log 2 – log 3 + log 5 =
b) 3.log 2 – 4.log 3 =
c) 1/2.log 25 – 1/3.log 64 + 2/3.log 27 =
d) log 5 – 1 =
e) 2.log 3 + 4 log 2 – 3 =
f) 3.log b – ½ log c =

6. Expresar como suma algebraica de logaritmos:

a) $\log \dfrac{U^3V^2}{W^5}$ $\qquad \log \sqrt{\dfrac{2x^3y}{z^7}}$ $\qquad \ln \sqrt[3]{x^{1/2}y^{-1/2}}$

7. Hallar x en las ecuaciones:

a) $3^x = 243$
b) $5^x = 1/125$
c) $2^{x+2} = 64$
d) $x^{-2} = 16$
e) $x^{-3/4} = 8$
f) $x^{-2/3} = 1/9$
g) $5^{x-2} = 1$

FUNCIONES LINEALES

Ecuación de la recta

Dados tres números fijos A, B y C, de los cuales A y B no son ambos nulos, todos los puntos (x,y) del plano que verifican la ecuación **Ax + By +C = 0**, forman una recta.

La ecuación **Ax + By +C = 0** se llama *ecuación general o explícita* de la recta.

Si A = 0 la recta es horizontal, y si B = 0 la recta es vertical.

Si B ≠ 0, es decir si la recta no es vertical, se puede despejar “y” en la ecuación general de la recta y escribirla en la forma **y = ax + b**. Esta última se llama *ecuación explícita* de la recta. Su gráfica es una recta no-vertical en el plano de las variables x e y. El número **a** se llama *pendiente*, y el número **b** se llama *ordenada al origen*.

Ej. Se construye una tabla de valores, siendo *y= 2x – 1*

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-7	-5	-3	-1	1	3	5

Se representa en un sistema de coordenadas los puntos (x,y) obtenidos.

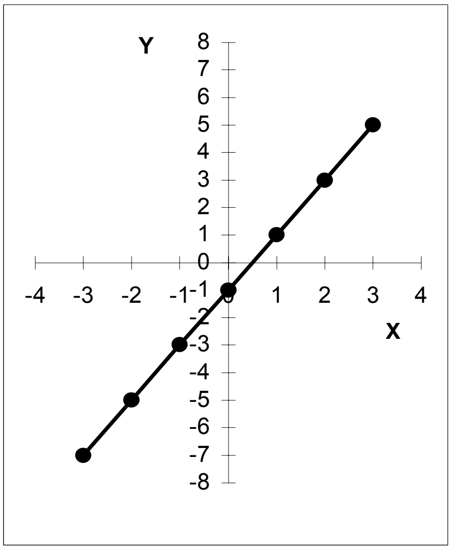


Figura 2. Representación gráfica de la recta en un sistema (x,y)

Representar:

a) $y = 2x + 1$ b) $y = x - 3$ c) $y = 3x - 2$ d) $y = 1/2x$ e) $y = x + 1$

SISTEMA DE ECUACIONES

Ecuación lineal con dos incógnitas

Una ecuación lineal con dos incógnitas (o variables) *x* e *y* es de la forma $ax + by = c$, donde *a,b,c* son constantes y $a,b \neq 0$. Dos ecuaciones o más de este tipo:

$$a_1x + b_1y = c_1 \qquad a_2x + b_2y = c_2$$

constituyen un sistema de ecuaciones lineales, en este caso, de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Todo par de valores *x* e *y* que satisfagan ambas ecuaciones, simultáneamente, recibe el nombre de *solución del sistema*.

Método de sustitución

Consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones y sustituir su valor en la otra.

Ej. Sea el sistema *a)* $2x – y = 4$
b) $x + 2y = -3$

De *a)* se obtiene $y = 2x – 4$ y sustituyendo este valor en *b)* resulta $x + 2(2x – 4) = -3$
o sea $5x – 8 = -3$ o bien $5x = 5$ $\Rightarrow$ $x = 1$.

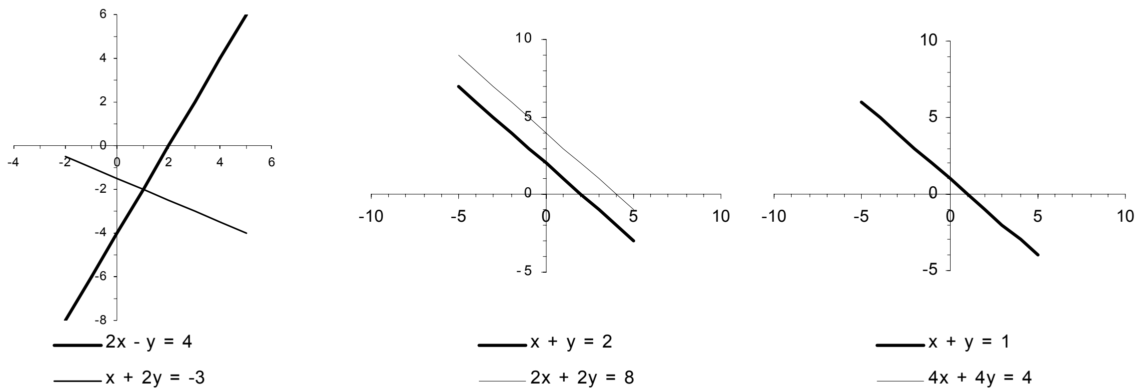
Sustituyendo $x = 1$ en la expresión que habíamos despejado de *a)*, $y = 2(1) – 4 = -2$.

Por lo tanto la solución del sistema de ecuaciones es $x = 1$ e $y = -2$

Método gráfico

Consiste en trazar en un mismo sistema de coordenadas, las dos rectas que representan las ecuaciones.

- La solución viene dada por las coordenadas *(x,y)* del punto de *intersección* de ambas.
- Si las rectas son *paralelas*, el sistema es *incompatible*, es decir, no tiene solución.
- Las ecuaciones dependientes están representadas por una misma recta. Esto indica que todos los puntos de la recta son una solución y, en definitiva, el sistema tiene infinitas soluciones de la forma $y = ax + b$.



Solución única   Ninguna solución   Infinitas soluciones

Figura 3. Resolución gráfica de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Problemas:

1. Resolver los siguientes sistemas por ambos métodos:

   a) $2x + y = 4$ a) $5x + 2y = 3$ a) $2x – 5y = 7$

   b) $x + y = 5$ b) $2x + 3y = -1$ b) $3x + y = 5$

2. Hallar dos números cuya suma sea 28 y su diferencia 12.
3. Cinco agendas y 8 lapiceras cuestan 115 pesos; 3 agendas y 5 lapiceras cuestan 70 pesos. Hallar el precio de las agendas y las lapiceras.
4. Hallar la velocidad de un barco (en aguas en reposo) y la velocidad de la corriente del río, sabiendo que emplea 2 horas en navegar 9 km a favor de la corriente y 6 horas en recorrer la misma distancia en sentido contrario.
5. La temperatura en escala Fahrenheit puede convertirse en centígrada, según la siguiente elación: $\mathbf{F = \mathit{m}C + \mathit{n}}$, con *m* y *n* constantes. A la presión de 1 atm el punto de ebullición del agua es 212°F, o bien 100°C, y su punto de congelación es 32°F, o bien 0°C. Deducir los valores de *m* y *n*.
6. Hallar dos números sabiendo que si uno de ellos se suma con el doble del otro se obtiene 21, y que si este último se suma con el doble del primero resulta 18.
7. Hace 2 años un padre era 6 veces mayor que su hijo. Hallar sus edades actuales sabiendo que dentro de 18 años la edad del padre será el doble que la del hijo.

ECUACIONES CUADRÁTICAS

Son de la forma **f(x) = ax² + bx + c**, con *a, b* y *c* constantes y $a \neq 0$. La gráfica de una función cuadrática se llama *parábola*.

El signo del coeficiente **a** indica hacia dónde es la apertura de la parábola: es abierta hacia arriba si a > 0 y hacia abajo si a < 0.

La parábola es simétrica con respecto a la recta vertical de ecuación **x = -b/2a**. Esta recta se llama *eje de simetría* de la parábola.

El punto de coordenadas **(-b/2a, c - b²/4a)** se llama *vértice* de la parábola.

Completar cuadrados

El método de completar cuadrados consiste en asimilar los términos $ax^2 + bx$ de la función cuadrática con los dos primeros términos del desarrollo del cuadrado del binomio, con el fin de transformar la función en la forma $f(x) = (Ax + B)^2 + C$. Esto sirve para diversos fines, entre ellos para obtener la fórmula de resolución de la ecuación cuadrática.

La ecuación cuadrática o ecuación de segundo grado con una incógnita

Se llama ecuación cuadrática a la ecuación $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$. Las soluciones de la ecuación, es decir los valores de x que verifican la ecuación se llaman *raíces* de la misma. Geométricamente, las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ son las abscisas de los puntos del plano en los que la parábola gráfica de la correspondiente función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ corta al eje de las abscisas. Estos valores se llaman también *ceros* de la función cuadrática.

Las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ se obtienen mediante la fórmula:

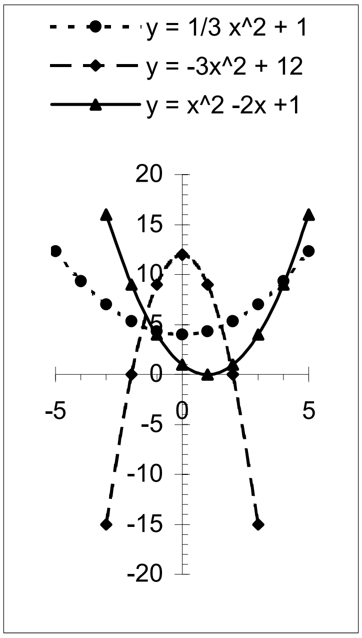
$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La expresión que aparece dentro de la raíz cuadrada, $\boldsymbol{b^2 - 4ac}$, se llama *discriminante* de la ecuación, y su signo indica la naturaleza de las raíces:

1. Si el *discriminante > 0,*
la ecuación tiene **dos raíces reales diferentes**.

2. Si el *discriminante = 0,*
la ecuación tiene **dos raíces reales iguales**.

3. Si el *discriminante < 0,*
la ecuación **no tiene raíces reales**.



MÉTODO DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA

Ecuaciones cuadráticas puras:

$x^2 - 4 = 0$	$x^2 = 4$	$x = \pm 2$	(dos raíces distintas: x =2 y x = -2)
$3x^2 = 0$	$x^2 = 0$	$x = 0$	(dos raíces iguales: x = 0)
$x^2 + 9 = 0$	$x^2 = -9$	$x = \pm \sqrt{-9}$	(dos raíces imaginarias, sin solución en **R**)

Formando un cuadrado perfecto (completar cuadrados):

$x^2 - 6x - 2 = 0$ $\quad x^2 - 6x = 2$ $\quad x^2 - 6x + 9 = 2 + 9$ $\quad (x - 3)^2 = 11$

$x - 3 = \pm \sqrt{11}$ $\quad x = 3 \pm \sqrt{11}$

Aplicando la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$3x^2 - 5x + 1 = 0$. En este caso *a =3*, *b = -5*, *c = 1* por lo tanto

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(1)}}{2(3)} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$$

Gráficamente:

Las raíces o soluciones reales de $ax^2 + bx + c = 0$ son los valores de x que corresponden a $y = 0$ en la gráfica de la parábola y = $ax^2 + bx + c$. Esto es, las soluciones son las abscisas de los puntos en los que la parábola corta al eje x. Si la curva no corta al eje x, las raíces son imaginarias.

Suma y producto de las raíces

De la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ cuyas raíces son r_1 y r_2, la suma $S = r_1 + r_2 = -b/a$ y el producto $P = r_1 . r_2 = c/a$.

Por lo tanto una ecuación de segundo grado cuyas raíces son r_1 y r_2 presenta la forma

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

Ej. $\quad r_1 = 2$ $\quad$ la ecuación cuadrática es: $x^2 - (2 - 5)x + 2(-5) = 0$, $\quad x^2 + 3x - 10 = 0$
$r_2 = -5$

Otra forma es la siguiente, toda ecuación cuadrática puede expresarse de la siguiente manera:

$a . (x – r_1). (x – r_2) = 0$ $\quad$ si a=1

$x^2 – x . (r_1 + r_2) + r_1.r_2 = 0$

$x^2 – xS + P = 0$

Problemas:

1) Resolver
   a) $x^2 - 16 = 0$

b) $4t^2 - 9 = 0$
c) $3 - x^2 = 2x^2 + 1$
d) $4x^2 + 9 = 0$

2) Hallar el término que se debe sumar para transformar las expresiones en un cuadrado perfecto
a) $x^2 - 2x$
b) $x^2 + 4x$
c) $4x^2 - 12x$

3) Resolver formando un cuadrado
a) $x^2 - 6x + 8 = 0$
b) $t^2 = 4 - 3t$
c) $3x^2 + 8x + 5 = 0$
d) $x^2 + 4x + 1 = 0$

4) Resolver aplicando la fórmula general
a) $x^2 - 3x + 2 = 0$
b) $4t^2 + 12t + 9 = 0$
c) $9x^2 + 18x - 17 = 0$
d) $6u(2 - u) = 7$

5) Hallar dos números positivos sabiendo que uno de ellos es igual al triple del otro más 5 y que el producto de ambos es igual a 68.

6) La hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a 34 cm. Hallar las longitudes de los catetos sabiendo que uno es 14 cm mayor que el otro.

7) Hallar la ecuación cuadrática de coeficientes enteros cuyas raíces son las indicadas:
a) 1, 2
b) -3, 2
c) 4/3, -3/5

8) Dos personas parten de un mismo punto al mismo tiempo, dirigiéndose por dos caminos perpendiculares. Sabiendo que las velocidad de una de ellas es 4 km/h más que la otra, y que al cabo de 2h distan 40 km, hallar sus velocidades.

9) Para formar una caja abierta de 54 cm^2 de base a partir de una placa de estaño de 9 x 12 cm, se cortan de sus esquinas unas piezas cuadradas y se doblan después las aristas. Hallar la longitud del lado del cuadrado que se corta en cada esquina.

DESCOMPOSICIÓN DE UN POLINOMIO EN FACTORES

Los factores de una expresión algebraica dada son dos o más expresiones algebraicas que multiplicadas entre sí originan la primera.

Un polinomio se descompone totalmente en factores cuando se puede expresar como producto de factores primos, es decir cuando el factor no admite más factores (o divisores) que él mismo, con signo + ó -, y la unidad $\pm$ 1.

Las siguientes fórmulas son de gran utilidad en la descomposición en factores:

Productos

I $a(c + d) = ac + ad$

II $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

III $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

IV $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$

V $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

VI $(a + b)(a^2 – ab + b^2) = a^3 + b^3$
$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

VII $(a +b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$

VIII $(a – b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 – b^3$
$(a – b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = a^4 – b^4$
$(a – b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) = a^5 – b^5$
$(a – b)(a^{n-1} + a^{n-2}b +...+ ab^{n-2} + b^{n-1}) = a^n – b^n$
para n entero positivo cualquiera

$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
$(a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) = a^5 + b^5$
$(a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b +...- ab^{n-2} + b^{n-1}) = a^n + b^n$
para n entero positivo impar

IX $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

Descomposición en factores

I **Factor monomio común**
$ac + ad = a(c + d)$
$6x^2y –2x^3 = 2x^2(3y – x)$

II **Diferencia de cuadrados**
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
$x^2 – 25 = x^2 – 5^2 = (x + 5)(x – 5)$

III **Trinomio cuadrado perfecto**
$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
$X^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$
$9x^2 – 12xy + 4y^2 = (3x – 2y)^2$

IV **Otros trinomios**
$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$
$acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$
$x^2 – 5x +4 = (x –4)(x –1)$
$5x^2 – 14x + 8 = (5x – 4)(x – 2)$

V **Cuatrinomio cubo perfecto**
$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$
$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$
$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x + 2)^3$
$x^3 – 9x^2 + 27x - 27 = (x - 3)^3$

VI **Suma y diferencia de dos cubos**
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 – ab + b^2)$
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
$8x^3 + 27y^3 = (2x)^3 + (3y)^3$
$= (2x + 3y)[(2x)^2 – (2x)(3y) + (3y)^2]$
$= (2x + 3y)(4x^2 – 6xy + 9x^2)$
$8x^3 – 1 = (2x)^3 – 1^3 = (2x – 1)(4x^2 +2x + 1)$

VII **Agrupamiento de términos**
$ac + bc + ad + bd = c(a + b) + d(a + b)$
$= (a +b)(c + d)$
$2x – 4bx + y – 2by = 2x(1 –2b) + y(1 –2b)$
$= (1 – 2b)(2x + y)$

VIII **Factores de $a^n \pm b^n$**
$a^n – b^n = (a – b)(a^{n-1} + a^{n-2}b +...+ ab^{n-2} + b^{n-1})$
$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b +...- ab^{n-2} + b^{n-1})$
$x^5 – 1 = (x –1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
$32x^5 + 1 = (2x)^5 + 1^5 =$
$(2x + 1)(16x^4 - 8x^3 + 4x^2 – 2x + 1)$

IX **Otro caso particular...**
$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a + b + c)^2$
$x^2 + y^2 + 9 + 2xy + 6x + 6y = (x + y + 3)^2$

Problemas

1) Resolver usando factor común:

a) $2x^2 - 3xy =$
b) $4x + 8y + 12z =$
c) $3x^2 + 6x^3 =$
d) $9s^3t + 15s^3t^3 - 3s^2t^2 =$

2) Resolver utilizando diferencia de cuadrados:

a) $x^2 - 9 =$
b) $25x^2 - 4y^2 =$
c) $9x^2y^2 - 16a^2 =$
d) $3x^2 - 12 =$
e) $x^4 - y^4 =$

3) Resolver utilizando trinomio cuadrado perfecto:

a) $x^2 + 8x + 16 =$
b) $1 + 4y + 4y^2 =$
c) $t^2 - 4t + 4 =$
d) $x^2 - 16xy + 64y^2 =$
e) $9x^4 - 24x^2y + 16y^2 =$

4) Resolver utilizando otros trinomios:

a) $x^2 + 6x + 8 =$
b) $x^2 - 6x + 8 =$
c) $x^2 + 2x - 8 =$
d) $x^2 - 2x - 8 =$
e) $x^2 - 7xy + 12y^2 =$
f) $x^2 + xy - 12y^2 =$
g) $16 - 10x + x^2 =$
h) $20 - x - x^2 =$
i) $3x^2 + 10x + 3 =$
j) $2x^2 - 7x + 3 =$
k) $2y^2 - y - 6 =$
l) $4z^4 - 9z^2 + 2 =$
m) $10s^2 + 11s - 6 =$
n) $6x^2 - xy - 12y^2 =$

5) Resolver:

a) $3x^2y^4 + 6x^3y^3 =$
b) $4y^2 - 100 =$
c) $1 - a^4 =$
d) $64x - x^3 =$
e) $8x^4 - 128 =$
f) $18x^3y - 8xy^3 =$
g) $x^2 + 4x + 4 =$
h) $4 - 12y + 9y^2 =$
i) $x^2 + 7x + 12 =$
j) $y^3 + 27 =$
k) $x^3 - 1 =$
l) $xy + 3y - 2x - 6 =$
m) $z^5 + 1 =$
n) x5 + 32y5 =
o) $x^3y^3 - y^3 + 8x^3 - 8 =$
p) $x^2 - 4y^2 + x + 2y =$
q) $x^3 + 8 =$
r) $2z^3 + 10z^2 - 28z =$
s) $5ax^2 - 10ax =$
t) 9x2 – 49 =
u) $x^2 + 2x + 1 =$
v) $x^3 + 2x^2 + x =$
w) $x^4 - 2x^2 + 1$

CONVERSIÓN DE UNIDADES

Distancia

Si me muevo en este sentido ←, divido por 10 en cada paso que doy (o multiplico por 10^x, siendo *x* el número de pasos)

km hm dam m dm cm mm

Si me muevo en este sentido →, multiplico por 10 en cada paso que doy (o multiplico por 10^x)

Unidades frecuentemente utilizadas son: $\mu m = 10^{-6}$ m, nm= 10^{-9} m, Å= 10^{-10} m.

Superficie

Si me muevo en este sentido ←, divido por 100 en cada paso que doy (o multiplico por 10^{-x})

km^2 hm^2 dam^2 m^2 dm^2 cm^2 mm^2

Si me muevo en este sentido →, multiplico por 100 en cada paso que doy (o multiplico por 10^x)

Volumen

Si me muevo en este sentido ←, divido por 1000 en cada paso que doy (o multiplico por 10^{-x})

km^3 hm^3 dam^3 m^3 dm^3 cm^3 mm^3

Si me muevo en este sentido →, multiplico por 1000 en cada paso que doy (o multiplico por 10^x)

o bien:

Si me muevo en este sentido ←, divido por 10 en cada paso que doy (o multiplico por 10^{-x})

kl hl dal l dl cl ml

Si me muevo en este sentido →, multiplico por 10 en cada paso que doy (o multiplico por 10^x)

Peso

Si me muevo en este sentido ←, divido por 10 en cada paso que doy (o multiplico por 10^{-x})

kg hg dag g dg cg mg

Si me muevo en este sentido →, multiplico por 10 en cada paso que doy (o multiplico por 10^x)

Unidades frecuentemente utilizadas son: $\mu g = 10^{-6}$ g, $ng = 10^{-9}$ g.

Ejemplos:

Convertir 2km a m = 2 10 10 10 m = 2.1000 m = 2000 m

$$2 \text{ m a km} = \frac{2}{10.10.10} \text{ km} = 2/(10\ 10\ 10) \text{ km} = 2/1000 \text{ km} = 0{,}002 \text{ km}$$

10 cm a m = 10/ 100 m = 0.1 m

15 g a mg = 15. 1000 mg = 15000 mg

3 g a kg = 3/1000 kg = 0,003 kg

$4\ cm^2$ a $m^2 = 4/(100\ 100)\ m^2 = 4/10000\ m^2 = 0{,}0004\ m^2$

$5\ m^3$ a $dm^3 = 5\ 1000\ dm^3 = 5000\ dm^3$

Combinadas

Considerar 1 h = 3600 s
1 s = 1/3600 h

v = 2 km/h a m/h = 2 10^3 m/h = 2000 m/h

$$v = 2 \text{ km/h a m/s} = \frac{2.10^3\ m}{3600s} = 2\ 10^3 \text{ m/ } 3600 \text{ s} = 2000/3600 \text{ m/s}$$

$$v = 3 \text{ m/s a km/h} = \frac{3/1000\ km}{1/3600\ h} = \frac{3 \cdot 3600}{1 \cdot 1000}\frac{km}{h} = 3.\ 3600/1000 \text{ km/h}$$

F = m.a F = 3 kg m/s^2 a g $cm/s^2 = 3.10^3.10^2\ g.cm/s^2 = 3\ 10^5\ g.cm/s^2$

FACTORES DE CONVERSIÓN

ACTIVIDAD (Curio/ Becquerelio)

1 pCi = 37 mBq
1 nCi = 37 Bq
1 µCi = 37 kBq
1 mCi = 37 MBq
1 Ci = 37 GBq
1 kCi = 37 TBq
1 MCi = 37 PBq
1 GCi = 37 EBq

1 Bq = 27 pCi
1 kBq = 27 nCi
1 MBq = 27 µCi
1 GBq = 27 mCi
1 TBq = 27 Ci
1 PBq = 27 kCi
1 EBq = 27 mCi

DOSIS EQUIVALENTE (rem/Sievert)

10 µrem = 0,1 µSv
100 µrem = 1 µSv
1 mrem = 0,01 mSv
10 mrem = 0,1 mSv
100 mrem = 1 mSv
1 rem = 0,01 Sv
10 rem = 0,1 Sv

DOSIS ABSORBIDA (rad/Gray)

1 mrad = 0,01 mGy
10 mrad = 0,1 mGy
100 mrad = 1 mGy
1 rad = 0,01 Gy
10 rad = 0,1 Gy

PREFIJOS

10^{-18} = a (ato)
10^{-15} = f (femto)
10^{-12} = p (pico)
10^{-9} = n (nano)
10^{-6} = µ (micro)
10^{-3} = m (mili)
10^{3} = k (kilo)
10^{6} = M (mega)
10^{9} = G (giga)
10^{12} = T (tera)
10^{15} = P (peta)
10^{18} = E (exa)